3. Určení posloupnosti

POSLOUPNOST MŮŽE BÝT URČENA

- VÝČTEM VŠECH PRVKŮ (pouze konečná posloupnost)

př. a) $a_1=-3,\ a_2=0,\ a_3=-1,\ a_4=0,\ a_5=-3$

b) zkráceně (hodnoty nelze zaměňovat)

$\underset{a_1}{-3},\ \underset{a_2}{0},\ \underset{a_3}{-1},\ \underset{a_4}{0},\ \underset{a_5}{-3}$

c) $\{[\underset{n}{1}, \underset{a_n}{-3}], [2,0], \underset{(n=3,\ a_3=-1)}{[3,-1]}, [4,0], [5,-3]\}$

d) tabulkou

n	1	2	3	4	5
a_n	-3	0	-1	0	-3

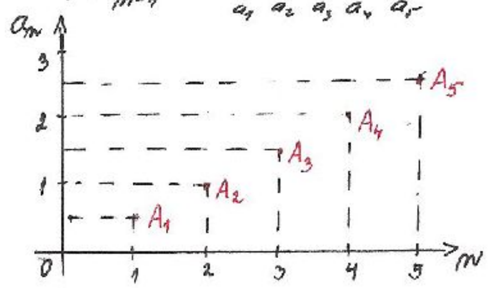
- GRAFICKY

GRAFEM POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ROZUMÍME MNOŽINU IZOLOVANÝCH BODŮ $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$, kde $A_n[n, a_n]$, $n \in N$

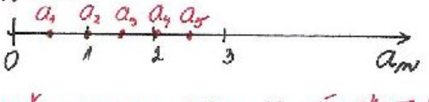
(u konečné posl. - konečná mn. navz. izol. bodů)

- posloupnost lze graficky znázor. nejen v kartézské soustavě souřadnic, ale i na číselné ose

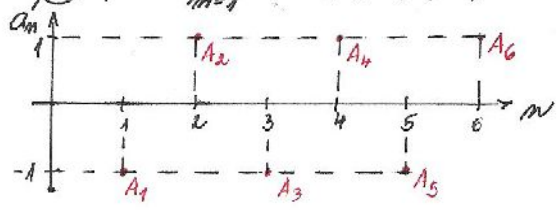
př. $\left(\frac{n}{2}\right)_{n=1}^{5}$ $\quad \underset{a_1}{\frac{1}{2}}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{\frac{3}{2}}, \underset{a_4}{2}, \underset{a_5}{\frac{5}{2}}$



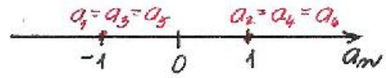
- na čís. ose



př. $((-1)^n)_{n=1}^{6}$ $\quad -1, 1, -1, 1, -1, 1$



- na čís. ose



- OBECNĚ PŘEDPISEM PRO N-TÝ ČLEN

př. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n=2n-1$ $\qquad$ zkráceně $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$ $\quad [1,3,5,7,9,\dots]$

př. $(b_n)_{n=1}^{5}$, kde $b_n=2^{-n}$ $\qquad$ zkráceně $(2^{-n})_{n=1}^{5}$ $\quad [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}]$

- REKURENTNĚ (lat. recurrere = vraceti se, jíti zpět)
  - dán PRVNÍ ČLEN a_1 (příp. několik dalších) a PŘEDPIS PRO N+1 ČLEN podle kterého lze jednoznačně určit a_{n+1} člen

[nevýhoda: pro určení např. 10 členu musíme nejprve určit 9 předch.]

př. $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1$ $\qquad$ př. $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$

Příklady

① Napište prvních 5 členů posloupnosti, je-li určena REKURENTNĚ takto:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$

$a_2 = 2a_1 + 1 = 2\cdot 1 + 1 = 3$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2a_3 + 1 = 2\cdot 7 + 1 = 15$

$a_5 = 2a_4 + 1 = 2\cdot 15 + 1 = 31$

b) DÚ $b_1 = 4,\ b_{n+1} = -2b_n$

$b_2 = -2b_1 = -2\cdot 4 = -8$

$b_3 = -2b_2 = -2\cdot(-8) = 16$

$b_4 = -2b_3 = -2\cdot 16 = -32$

$b_5 = -2b_4 = -2\cdot(-32) = 64$

c) $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_{n+2} = 2c_{n+1} - 3c_n$

$c_3 = 2c_2 - 3c_1 = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -5$

$c_4 = 2c_3 - 3c_2 = 2\cdot(-5) - 3\cdot(-1) = -10 + 3 = -7$

$c_5 = 2c_4 - 3c_3 = 2\cdot(-7) - 3\cdot(-5) = -14 + 15 = 1$

d) FIBONACCIHO POSLOUPNOST

DÚ $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

DÚ FIBONACCIHO POSLOUPNOST

- italský kupec a matematik Leonardo Pisánský (1170–1250) zvaný Fibonacci („syn Bonacciův") ve své knize Liber Abaci (1202)
  - ÚLOHA O MNOŽENÍ KRÁLÍKŮ

    kolik párů králíků se narodí průběhem 1 roku, jestliže pár králíků přivede na svět měsíčně 1 pár, přičemž králíci začínají rodit ve 2 měsících svého věku (úhyn neuv.)

  - konec 1. měsíce … 2 páry

    konec 2. měsíce 3 páry

    konec 3. měsíce 5 párů (1 pár už od páru naroz. na konci 1. měsíce)

    konec 4. měsíce 8 párů (k 5ti párům z konce 3. m. přibude 1 pár od páru původ., 1 pár od páru naroz. na konci 1. m. a 1 pár od páru naroz. na konci 2. m.

  - komplikované

- lépe: počet králíků na konci (n+1)ho měsíce … a_{n+1}

  počet králíků na konci (n+2)ho měsíce … a_{n+2}

  - bude a_{n+1} a kromě toho se narodí tolik párů králíků, kolik jich bylo na konci n-tého měsíce (před 2 měsíci) tj. a_n $\Rightarrow a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

($a_0 = 1$) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 8,\ a_5 = 13,\ a_6 = 21,\ a_7 = 34,\ a_8 = 55,$

$a_9 = 89,\ a_{10} = 144,\ a_1 = 233,\ a_{12} = 377$ párů králíků na konci roku

obecně:

$a_1 = 2,\ a_2 = 3$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

② Vyjádřete dané posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ $\quad a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad$ tj. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ $\quad a_n = (-1)^{n+1}$ nebo $a_n = (-1)^{n-1}$ $\quad$ tj. $\left((-1)^{n+1}\right)_{n=1}$

c) $1, 8, 27, 64, 125, \dots$ $\quad a_n = n^3$ $\quad$ tj. $(n^3)_{n=1}^{\infty}$

d) $54, -18, 6, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \dots$ $\quad a_n = ?$

$a_1 = 54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3$

$a_2 = -18 = -2 \cdot 9 = -2 \cdot 3^2$

$a_3 = 6 = +2 \cdot 3 = +2 \cdot 3^1$

$a_4 = -2 = -2 \cdot 1 = -2 \cdot 3^0$

$a_5 = \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot 3^{-1}$

$a_6 = -\frac{2}{9} = -2 \cdot \frac{1}{9} = -2 \cdot 3^{-2}$

vidím:

① zn. se střídají, první ⊕ $(-1)^{n-1}$

② číslo 2 u všech

③ mocniny 3 - pro $n = 1 \Rightarrow 3 = 4-1$

$\left.\begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow 2 = 4-2 \\ n = 3 \Rightarrow 1 = 4-3 \\ \vdots \end{array}\right\} 3^{4-n}$

$\Rightarrow a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^{4-n}$

$\left[(-1)^{n-1} \cdot 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-n} \right]$

③ Určete prvních 5 členů posl. určení rekurentně

DÚ a) $a_1 = 2, \ a_{n+1} = 3a_n \quad n \in N$

$a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 6 = 18$

$a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54$

$a_5 = 3a_4 = 3 \cdot 54 = 162$

DÚ b) $a_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

$a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$a_4 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3+2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

$a_5 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$

DÚ c) $a_1 = 0, \ a_2 = 1, \ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$

$a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2 - 3 \cdot 0 = 2$

$a_4 = 2a_3 - 3a_2 = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$

$a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$

PEČLIVĚ, RYCHLE SE UDĚLÁ CHYBA!

④ Určete první člen posl. a sedmý člen posl.

a) $a_4 = 7, \ a_{n+1} = a_n - 3$ $\quad \Rightarrow a_n = a_{n+1} + 3$

$a_5 = a_4 - 3 = 7 - 3 = 4$ $\qquad a_3 = a_4 + 3 = 7 + 3 = 10$

$a_6 = a_5 - 3 = 4 - 3 = 1$ $\qquad a_2 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$

$a_7 = a_6 - 3 = 1 - 3 = -2$ $\qquad a_1 = a_2 + 3 = 13 + 3 = 16$

[lze i $a_{n+1} = a_n - 3$

$a_4 = a_3 - 3 \Rightarrow a_3 = a_4 + 3 = 7 + 3 = 10$]

b) $a_4 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 5 \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n+1} + 5$

DÚ

$a_5 = a_4 - 5 = 20 - 5 = 15 \qquad a_3 = a_4 + 5 = 20 + 5 = 25$

$a_6 = a_5 - 5 = 15 - 5 = 10 \qquad a_2 = a_3 + 5 = 25 + 5 = 30$

$a_7 = a_6 - 5 = 10 - 5 = 5 \qquad a_1 = a_2 + 5 = 30 + 5 = 35$

c) $a_3 = 10,\ a_4 = 10^2,\ a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

DÚ

$a_5 = a_4 \cdot a_3 = 10^2 \cdot 10 = 10^3$

$a_6 = a_5 \cdot a_4 = 10^3 \cdot 10^2 = 10^5 \qquad a_2 = \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{10^2}{10} = 10$

$a_7 = a_6 \cdot a_5 = 10^5 \cdot 10^3 = 10^8 \qquad a_1 = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{10}{10} = 1$

⑤ Urči danou posloupnost rekurentně

a) $\left(\dfrac{1}{n(n+1)} \right)_{n=1}^{\infty}$

[určit posloupnost rekurentně znamená určit 1. ČLEN a VZOREC pro a_{n+1} ČLEN pomocí předcházejících členů]

1. zp. – PŘES PODÍL

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{n+2}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+2} \quad / \cdot a_n$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} \cdot a_n$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$

rek. určení posl.

2. zp. – PŘES ROZDÍL (přes rozdíl se dokazuje i monotónnost – viz vl. posl. – později)

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{-2}{n(n+1)(n+2)}$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{-2}{n(n+1)(n+2)} \quad / + a_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{n+1} = a_n - \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)},\ a_1 = \dfrac{1}{2}}$

} jiné určení – lze úpravami na tvar 1. zp. *

[* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+2-2}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1 \cdot n}{\underbrace{n(n+1)}_{a_n}(n+2)}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} \cdot a_n$]

3. zp. – úpravou a_{n+1} členu tak, aby obs. a_n člen

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{1}{2}$

$a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{n}{n(n+1)} \cdot \dfrac{1}{n+2} = \overbrace{\dfrac{1}{n(n+1)}}^{a_n} \cdot \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n}{n+2} \cdot a_n$

$\boxed{a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n,\ a_1 = \dfrac{1}{2}}$

[nejmen. polož. pro a_n … $n(n+1)$ ⇒ rozšíříme 1 ve vhod. tvaru]

[! POZOR ! často se zapomíná napsat 1. člen – určíme ho ze vztahu pro n-tý člen ze zadané posl.]

b) $(\log 3^n)_{n=1}^{\infty}$

$a^{r+s} = a^r a^s$

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

$a_n = \log 3^n \Rightarrow a_1 = \log 3$

$a_{n+1} = \log 3^{n+1}$

1. zp. přes PODÍL

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log 3^{n+1}}{\log 3^n} = \frac{\log(3^n \cdot 3)}{\log 3^n} = \frac{\log 3^n + \log 3}{\log 3^n} = \frac{a_n + \log 3}{a_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + \log 3}{a_n} \quad / \cdot a_n \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + \log 3 \\ a_1 = \log 3 \end{array}\right\} \text{rekurentní určení posl.}$$

2. zp. přes ROZDÍL

$$a_{n+1} - a_n = \log 3^{n+1} - \log 3^n = \log(3^n \cdot 3) - \log 3^n = \log 3^n + \log 3 - \log 3^n = \log 3$$

$$a_{n+1} - a_n = \log 3 \quad / + a_n$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + \log 3 \\ a_1 = \log 3 \end{array}\right\} \text{rekurentní urč. posl.}$$

3. zp. úpravou a_{n+1} členu

$$a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log(3^n \cdot 3) = \log 3^n + \log 3 = a_n + \log 3$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = \log 3 + a_n \\ a_1 = \log 3 \end{array}\right\} \text{rekurentní urč. posl.}$$

zd c) $(n(n+1))_{n=1}^{\infty}$

$a_n = n(n+1) \Rightarrow a_1 = 1 \cdot 2 = 2$

$a_{n+1} = (n+1)(n+2)$

1. zp. přes PODÍL

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n} \quad / \cdot a_n$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot a_n \\ a_1 = 2 \end{array}\right\} \text{rekur. určení posl.}$$

[úprava na tvar 2. zp.

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n = \frac{(n+2)a_n}{n} = \frac{na_n + 2a_n}{n} = a_n + \frac{2a_n}{n} = a_n + \frac{2(n+1)n}{n} = a_n + 2(n+1)$$

nebo dosadit za a_n a upravit jako v 3. zp.]

2. zp. přes ROZDÍL

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = (n+1)[n+2-n] = 2(n+1) \quad / + a_n$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + 2(n+1) \\ a_1 = 2 \end{array}\right\} \text{rek. urč. posl.}$$

[úprava na tvar 1. zp.

$$a_{n+1} = a_n + 2(n+2) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2) \cdot \frac{n}{n} = \frac{n+2}{n} \cdot n(n+1) = \frac{n+2}{n} \cdot a_n$$]

3. zp. úpravou a_{n+1}

$a_n = n(n+1) = n^2 + n$

$$a_{n+1} = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = \overbrace{(n^2 + n)}^{a_n} + 2n + 2 = a_n + 2(n+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + 2(n+1) \\ a_1 = 2 \end{array}\right\} \text{rek. urč. posl.}$$

ú d) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

1. zp. POSTIL

$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \quad | \cdot a_n$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} a_n \qquad a_1 = \frac{1}{2}}$$

REK. URČ. POST.

2. zp. ROZDÍL

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad | + a_n$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + a_n \qquad a_1 = \frac{1}{2}}$$

⑥ Urči vzorec pro n-tý člen posloupnosti dané rekurentně

a) $a_1 = 1, \ a_{n+1} = 2a_n$

1. zp.

$a_1 = 1 \qquad = 2^0$
$a_2 = 2a_1 = 2\cdot 1 = 2 \qquad = 2^1$
$a_3 = 2a_2 = 2\cdot 2 = 4 \qquad = 2^2$
$a_4 = 2a_3 = 2\cdot 4 = 8 \qquad = 2^3$
$a_5 = 2a_4 = 2\cdot 8 = 16 \qquad = 2^4$
$\vdots$

hypotéza $a_n = 2^{n-1}$

důkaz matem. indukcí

1. $n = 1$ $\quad a_1 = 1$ (viz rek. z.) $\quad a_1 = 2^{1-1} = 1$ $\qquad V(1)$ pl.
2. $\forall k \in N$: je-li $a_k = 2^{k-1}$, pak $a_{k+1} = 2^k$

$a_{k+1} = 2^k = 2^{k-1+1} = 2^{k-1} \cdot 2^1 = 2a_k$ cbd.

[viz rek. zadání]

2. zp.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2a_1$
$a_3 = 2a_2$
$a_4 = 2a_3$
$\vdots$
$a_{n-1} = 2a_{n-2}$
$a_n = 2a_{n-1}$

vynásobíme

$a_1 a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = 1 \cdot 2a_1 \cdot 2a_2 \cdot 2a_3 \cdot \ldots \cdot 2a_{n-2} \cdot 2a_{n-1}$

$\cancel{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}} \cdot a_n = 2^{n-1} \cdot \cancel{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-2} a_{n-1}}$

$| : (a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1}) \neq 0$

(lze, žádný z $a_1 a_2$ není roven 0)

$a_n = 2^{n-1}$

- závěr: $a_n = 2^{n-1}$ $n \in N$, tj. $\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

ú b) $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n (n+1)$

1. zp.

$a_1 = 1 \qquad = 1!$
$a_2 = 2a_1 = 2\cdot 1 = 2 \qquad = 2!$
$a_3 = 3a_2 = 3\cdot 2\cdot 1 \qquad = 3!$
$\vdots$
$a_{n-1} = a_{n-2}(n-1) \qquad (n-1)!$
$a_n = a_{n-1} \cdot n \qquad n!$

hypotéza $a_n = n!$

důkaz:

1. $n = 1$ $\quad a_1 = 1$ $\quad a_1 = 1! = 1$ $\qquad V(1)$ pl.
2. $\forall k \in N$: je-li $a_k = k!$ pak $a_{k+1} = (k+1)!$

$a_{k+1} = a_k(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$ cbd.

z rek. urč.

2. zp.

$a_1 = 1$
$a_2 = 2a_1$
$\vdots$
$a_{n-1} = (n-1)a_{n-2}$
$a_n = n a_{n-1}$

vynás. $a_1 a_2 \ldots a_n = 1 \cdot 2a_1 \cdot 3a_2 \cdot \ldots \cdot (n-1)a_{n-2} \cdot n a_{n-1}$

$\cancel{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} a_n = \cancel{a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) n$

$a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) n$

$a_n = n!$

- ZÁVĚR: $a_n = n!$, tj. $(n!)_{n=1}^{\infty}$